Weierstrass 型表現を持つ曲面の近似定理

東京科学大学 理学院 数学系 数学コース
佐野 宗輝 (Shuki SANO) *

概要

極小曲面は、Weierstrass の表現公式と呼ばれる公式によって複素解析と密接に繋がっている。近年、Alarcón, Forstnerič, López によって複素解析の近似定理が極小曲面論に拡張された。 Weierstrass 型の表現公式をもつ曲面は、極小曲面以外にも存在し、そうした曲面に対しても近似定理を示すことができる。本講演では、極大面と呼ばれる、特異点をもつ曲面に対する近似定理を紹介する。

1 導入

複素解析には, Runge の近似定理といった, 関数の近似に関する定理が存在する. こうした近似定理では, Runge という性質を仮定する.

定義 1.1. Riemann 面 M の閉集合 S は, 補集合 $M \setminus S$ が相対コンパクトな連結成分をもたないとき, **Runge** であると言われる.

複素解析の近似定理により, 開 Riemann 面 M のコンパクトかつ Runge な部分集合上の関数は, M 全体で定義された正則関数によって一様近似できることがわかる.

事実 1.2 (Runge の近似定理)**.** M を開 Riemann 面, $S \subset M$ をコンパクトかつ Runge な部分集合, f を S のある開近傍上で正則な関数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある正則関数 $F : M \to \boldsymbol{C}$ が存在して, $\|F - f\|_S \coloneqq \sup_{p \in S} |F(p) - f(p)| < \varepsilon$ をみたす.

事実 1.3 (Mergelyan の定理)**.** M を開 Riemann 面, $S \subset M$ をコンパクトかつ Runge な部分集合, $f : S \to \boldsymbol{C}$ は連続かつ K の内部 $\mathring{S}$ 上で正則な関数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある正則関数 $F : M \to \boldsymbol{C}$ が存在して, $\|F - f\|_S < \varepsilon$ をみたす.

これらの近似定理は, Stein 多様体を定義域とする関数や, 岡多様体に値を取る写像へと一般化されており, 岡理論とも深い関係がある ([2]). その応用の一つとして, Alarcón, Forstnerič, López は, Weierstrass の表現公式を用いて極小曲面に対する近似定理を示した. この定理により, 開 Riemann 面 M のコンパクトかつ Runge な部分集合を定義域とする極小曲面 (一般化された極小曲面) は, M 全体で定義された極小曲面によって一様近似できることがわかる.

* E-mail : sano.s.7465@m.isct.ac.jp

事実 1.4 ([1, Proposition 3.3.2])**.** M を開 Riemann 面, $S \subset M$ を連結な admissible set (所定の条件をみたすコンパクト集合) で, 包含写像 $S \hookrightarrow M$ が同型 $H_1(S, \boldsymbol{Z}) \cong H_1(M, \boldsymbol{Z})$ を誘導するもの (特に, S は Runge) とする．このとき, S を定義域とする一般化された極小曲面 $(x, f\theta)$ と, $\varepsilon > 0$ に対して, 像が超平面に含まれないような極小曲面 $X : M \to \boldsymbol{R}^n$ が存在して, $\|X - x\|_S < \varepsilon$ をみたす.

Alarcón らの手法は, Weierstrass の表現公式から得られる正則写像に対して複素解析の近似定理を適用するというものである．一方で, 極小曲面以外にも, Weierstrass 型の表現公式をもつ曲面は存在する．本稿では, そのような曲面の中でも特に「極大面」と呼ばれる, 特異点をもつ曲面を取り挙げる．極大面に対する近似定理を紹介するとともに, カスプ辺などの特異点をもつ曲面に対し, その特異点の型を保ったままの近似が可能であることについても論じる.

2　準備

2.1　極大面

標準的な座標 (x^0, x^1, x^2) を備えたアファイン空間 $\boldsymbol{R}^3$ に計量

$$\langle\ ,\ \rangle := -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

を入れた空間を 3 次元 Minkowski 空間とよび, L^3 で表す．2 次元多様体 M から L^3 へのはめ込み $f : M \to L^3$ は, 誘導計量

$$ds^2 := f^*\langle\ ,\ \rangle = \langle df, df \rangle$$

が正定値のとき, **空間的**であると言われる．以下で定義される写像 $\boldsymbol{H} : M \to L^3$ を, 空間的はめ込み f の**平均曲率ベクトル場**と呼ぶ:

$$\boldsymbol{H} := -\frac{1}{2}\Delta_{ds^2} f.$$

ただし, Δ_{ds^2} は ds^2 に関するラプラシアンである．さらに, 平均曲率ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ が恒等的に 0 となるとき, f を**極大曲面**と呼ぶ.

ユークリッド空間内の極小曲面とは異なり, 完備な極大曲面は平面に限るという, 強い結果が知られている．そのため, より広いクラスの曲面を扱うために, 特異点を許容する極大曲面が定義された.

定義 2.1 ([5, Definitions 2.1])**.** M を向きづけられた 2 次元多様体, $f : M \to L^3$ をなめらかな写像とする．稠密な開集合 $W_f \subset M$ が存在して, $f|_{W_f}$ が極大曲面となるとき, f を**極大写像**と呼ぶ．また, $ds^2 = f^*\langle\ ,\ \rangle$ が退化する点 $p \in M \setminus W_f$ を f の**特異点**と呼ぶ.

定義 2.2 ([5, Definitions 2.2])**.** M を向きづけられた 2 次元多様体とし, $f : M \to L^3$ を極大写像とする．以下をみたす特異点 $p \in M \setminus W_f$ を**許容的な特異点**と呼ぶ.

(1) p の開近傍 U と C^1 級関数 $\beta : U \cap W_f \to (0, \infty)$ を適切に選べば, $U \cap W_f$ 上のリーマン計量 βds^2 は, U 上の C^1 級リーマン計量に拡張できる.
(2) $df(p) \neq 0$.

全ての特異点が許容的である極大写像 f を**極大面**と呼ぶ.

極大面 $f: M \to L^3$ に対し, $ds^2|_{W_f}$ が共形計量となるような M の複素構造の存在が知られている ([5, Proposition 2.3]). そこで以下では, この複素構造により, M を Riemann 面とみなす. ユークリッド空間内の極小曲面と同様に, 極大面も Riemann 面上の有理型関数と正則 1-形式による表現公式をもつ.

事実 2.3 (Weierstrass 型の表現公式, [5, Theorem 2.6])**.** M を連結な Riemann 面とし, $f: M \to L^3$ を極大面とする. このとき, 以下をみたす有理型関数 g と正則 1-形式 ω が存在する:

$$f(z) = f(z_0) + \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \left(-2g, 1+g^2, i(1-g^2)\right)\omega.$$

ただし, $z_0 \in M$ である.

逆に, 有利型関数 g と正則 1-形式 ω を, $(1+|g|^2)^2\omega\overline{\omega}$ が M 上のリーマン計量となるように取り, $1-|g|^2$ は恒等的に 0 とならないとする. もし, 全ての閉曲線 $C \subset M$ に対して

$$\mathrm{Re}\int_{C} \left(-2g, 1+g^2, i(1-g^2)\right)\omega = 0$$

が成り立つなら, 以下で定義される $f: M \to L^3$ は極大面である:

$$f(z) \coloneqq \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \left(-2g, 1+g^2, i(1-g^2)\right)\omega.$$

ただし, $z_0 \in M$ である. f の特異点集合は $\{p \in M : |g(p)| = 1\}$ で与えられる.

定義 2.4. 事実 2.3 によって得られる組 (g, ω) を極大面 f の **Weierstrass データ**と呼ぶ.

曲面の特異点は $\mathcal{A}$-同値性に基づいて分類されており, 極大面に現れる特異点の種類は Weierstrass データによって判定することができる.

定義 2.5 ([4, Examples 2.5.2, 2.5.3, and 2.5.5])**.** $j = 1, 2$ に対し, $f_j : U_j \to \boldsymbol{R}^3$ を $p_j \in \boldsymbol{R}^2$ の開近傍 U_j 上で定義された滑らかな写像とする. 十分小さく取り直した U_1 と U_2 の間の微分同相写像 $\varphi: U_2 \to U_1$ で $\varphi(p_2) = p_1$ をみたすものと, $f_j(p_j) \in \boldsymbol{R}^3$ の十分小さな開近傍 Ω_j $(j = 1, 2)$ の間の微分同相写像 $\Phi: \Omega_2 \to \Omega_1$ が存在して,

$$\Phi \circ f_2 = f_1 \circ \varphi$$

が成り立つとき, f_2 は p_2 において f_1 に **$\mathcal{A}$-同値**であるという.

- $p_1 = (0, 0)$ かつ $f_1(u, v) = f_C(u, v) \coloneqq (u^2, u^3, v)$ とする (図 1). f_2 が p_2 においてこの f_1 と $\mathcal{A}$-同値であるとき, f_2 は p_2 において**カスプ辺**をもつという.
- $p_1 = (0, 0)$ かつ $f_1(u, v) = f_S(u, v) \coloneqq (u, -4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$ とする (図 2). f_2 が p_2 においてこの f_1 と $\mathcal{A}$-同値であるとき, f_2 は p_2 において**ツバメの尾**をもつという.
- $p_1 = (0, 0)$ かつ $f_1(u, v) = f_{CR} \coloneqq (u, uv^3, v^2)$ とする (図 3). f_2 が p_2 においてこの f_1 と $\mathcal{A}$-同値であるとき, f_2 は p_2 において**カスプ状交叉帽子**をもつという.

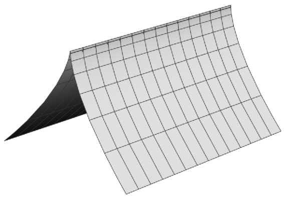

図 1　f_C の像

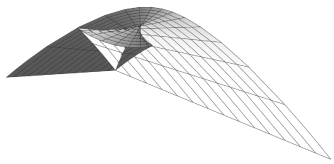

図 2　f_S の像

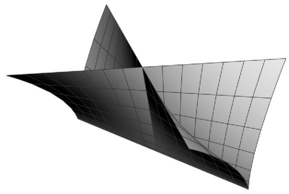

図 3　f_{CR} の像

事実 2.6 ([3, Theorem 2.4], [5, Theorem 3.1])**.** U を複素平面 $\boldsymbol{C}$ の領域, z を $\boldsymbol{C}$ の標準座標, $f : U \to L^3$ を Weierstrass データが $(g, \omega = \hat{\omega} dz)$ である極大面とする. このとき, 以下が成立する.

(1) f が $p \in U$ においてカスプ辺をもつための必要十分条件は,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{g'}{g^2\hat{\omega}}\right)_p \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{g'}{g^2\hat{\omega}}\right)_p \neq 0.$$

ただし, $'$ で z に関する微分を表す.

(2) f が $p \in U$ においてツバメの尾をもつための必要十分条件は,

$$\left(\frac{g'}{g^2\hat{\omega}}\right)_p \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{g}{g'}\left(\frac{g'}{g^2\hat{\omega}}\right)'\right\}_p \neq 0$$

(3) f が $p \in U$ においてカスプ状交叉帽子をもつための必要十分条件は,

$$\left(\frac{g'}{g^2\hat{\omega}}\right)_p \in i\boldsymbol{R} \setminus \{0\} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Im}\left\{\frac{g}{g'}\left(\frac{g'}{g^2\hat{\omega}}\right)'\right\}_p \neq 0$$

2.2　一般化された極大面

Alarcón, Forstnerič, López は, 所定の条件をみたすコンパクト集合上で定義された極小曲面を「一般化された極小曲面」と呼び, これに対して近似定理を示した (事実 1.4). これにならい, 極大面の近似定理を示すための準備として, 一般化された極大面を定義する. そのためにまず, 定義域として許容されるコンパクト集合について述べる.

定義 2.7 ([1, Definition 1.12.9])**.** M を Riemann 面とする. コンパクト集合 $S = K \cup E \subset M$ が以下をみたすとき, **admissible set** と呼ぶ (図 4):

- K は区分的に C^1 級の境界を持つ有限個のコンパクト領域の非交和,
- E は有限個の滑らかな弧と単純閉曲線の非交和,
- E に含まれる弧が K と交わるならば, 交点は弧の端点であり, 横断的に交わる.

事実 2.3 により, 極大面の各成分は調和関数となる. したがって, コンパクト Riemann 面を定義域とする極大面は存在しない. そこで以下では, 極大面の定義域として開 Riemann 面のみを考える. 開 Riemann 面上には, 至る所で 0 にならない正則 1-形式 θ が存在することが知られている. θ と複素 2

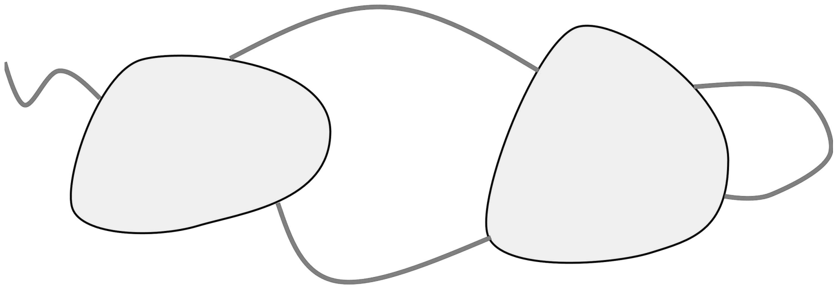

図 4　admissible set

次元多様体

$$\boldsymbol{B}_*^2 \coloneqq \{(z^0, z^2, z^3) \in \boldsymbol{C}^3 \setminus \{0\} : -(z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 = 0\}$$

を用いて, 極大面の Weierstrass 型表現公式 (事実 2.3) を書き換えることができる.

命題 2.8 (Weierstrass 型表現公式の書き換え)**.** M を開リーマン面, θ を至る所で 0 にならない正則 1-形式, $f : M \to L^3$ を滑らかな写像とする. このとき, f が極大面であるための必要十分条件は, 以下をみたす正則写像 $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2) : M \to \boldsymbol{B}_*^2 \subset \boldsymbol{C}^3$ が存在することである.

- $-|\varphi^0|^2 + |\varphi^1|^2 + |\varphi^2|^2$ は恒等的に 0 でない.
- 全ての閉曲線 $C \subset M$ に対し
$$\mathrm{Re} \int_C \varphi\theta = 0.$$
- $p_0 \in M$ を任意に固定すると, p_0 を含む M の連結成分上で
$$f(p) = f(p_0) + \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \varphi\theta.$$

命題 2.8 を踏まえ, 一般化された極大面を以下のように定義する.

定義 2.9. M を開 Riemann 面, θ を至る所で 0 にならない正則 1-形式, $S = K \cup E \subset M$ を admissible set とし, $r \in \boldsymbol{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ とする. C^r 級写像 $f : S \to L^3$ と, S の内部 $\mathring{S} = \mathring{K}$ への制限が正則な C^{r-1} 級写像 $\varphi : S \to \boldsymbol{B}_*^2$ が以下をみたすとき, $(f, \varphi\theta)$ を C^r **級一般化された極大面**と呼ぶ.

- 全ての閉曲線 $C \subset S$ に対し
$$\mathrm{Re} \int_C \varphi\theta = 0.$$
- $p_0 \in S$ を任意に固定すると, p_0 を含む S の連結成分上で
$$f(p) = f(p_0) + \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \varphi\theta.$$

注意 2.10. $(f, \varphi\theta)$ を C^r 級一般化された極大面とし, $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2)$ とおく. もし $-|\varphi^0(p)|^2 + |\varphi^1(p)|^2 + |\varphi^2(p)|^2 \neq 0$ をみたす $p \in \mathring{S}$ が存在するなら, 命題 2.8 により, f の $\mathring{S}$ への制限 $f|_{\mathring{S}}$ は極大面である.

3 主定理

極大面の近似定理を示すためには, 複素解析におけるいくつかの定理が必要となる. これらの定理を用いて, 一般化された極大面 $(f, \varphi\theta)$ の φ を近似することで, 所望の結果が導かれる.

まずは, 以下の通り記号を設定する.

記号 3.1. M を Riemann 面, $U \subset M$ を開集合, $S \subset M$ を部分集合, X を複素多様体とし, $r \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とする.

$$\mathcal{O}(U, X) \coloneqq \{f : U \to X : \text{正則写像}\},$$
$$\mathcal{A}^r(S, X) \coloneqq \{f : S \to X : f \text{ は } C^r \text{ 級写像で}, f|_{\mathring{S}} \text{ は正則写像}\}.$$

前ページで定義した複素 2 次元多様体 $\boldsymbol{B}^2_*$ に値を取る写像に関して, 以下が成り立つ.

定理 3.2. M を開 Riemann 面, $S \subset M$ をコンパクトかつ Runge な部分集合とし, $r \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とする. このとき, 全ての $\varphi \in \mathcal{A}^r(S, \boldsymbol{B}^2_*)$ は, M 上連続に拡張することができる. つまり, ある連続関数 $\tilde{\varphi} : M \to \boldsymbol{B}^2_*$ が存在して, $\tilde{\varphi}|_S = \varphi$ が成り立つ.

[1, Example 1.13.8] や [2, Proposition 5.6.22] などから, $\boldsymbol{B}^2_*$ は岡多様体であることが示される. この事実に加え, Runge の近似定理 (事実 1.2) の岡多様体に値を取る写像への一般化 ([1, Theorem 1.13.3]) や定理 3.2 などを用いることで, 以下の近似定理を得る.

定理 3.3. M を開 Riemann 面, θ を至る所で 0 にならない M 上の正則 1-形式, $S \subset M$ を Runge な admissible set, $A \subset S$ を有限集合とし, $s \in \boldsymbol{Z}_{>0}$, $r \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とする. さらに, $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_l\}$ を S 内の区分的に滑らかな単純閉曲線と弧からなる集合とし, 各 $C_i \in \mathcal{C}$ は $\bigcup_{j \neq i} C_j$ と交わらない弧 I_i を含み, $\bigcup_{i=1}^{l} C_i$ は M の Runge な部分集合であるとする. このとき, 任意の $\varphi \in \mathcal{A}^r(S, \boldsymbol{B}^2_*)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 以下をみたす $\tilde{\varphi} \in \mathcal{O}(M, \boldsymbol{B}^2_*)$ が存在する.

(1) $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_S < \varepsilon$.

(2) 各 $C_i \in \mathcal{C}$ に対し,

$$\int_{C_i} \tilde{\varphi}\theta = \int_{C_i} \varphi\theta.$$

(3) $\tilde{\varphi}(M) \subset \boldsymbol{C}^3$ によって生成される複素線型空間は $\boldsymbol{C}^3$ に等しい.

(4) $\tilde{\varphi}|_A = \varphi|_A$ であり, $\tilde{\varphi} - \varphi$ は各点 $p \in A \cap \mathring{S}$ で s 次の零点をもつ.

定理 3.3 と特異点の判定条件 (事実 2.6) を用いると, 極大面の近似定理が得られる.

定理 3.4. M を開 Riemann 面, θ を至る所で 0 にならない M 上の正則 1-形式, $A \subset S$ を有限集合とし, $s \in \boldsymbol{Z}_{>0}$ とする. さらに, $S \subset M$ を連結かつ Runge な admissible set で包含写像 $S \hookrightarrow M$ が同型 $H_1(S, \boldsymbol{Z}) \cong H_1(M, \boldsymbol{Z})$ を誘導するもの (特に, S は Runge) とする. このとき, S を定義域とする一般化された極大面 $(f, \varphi\theta)$ と, $\varepsilon > 0$ に対して, 以下をみたす極大面 $\tilde{f} : M \to L^3$ が存在する.

(1) $\|\tilde{f} - f\| < \varepsilon$.

(2) 全ての閉曲線 $C \subset S$ に対し,

$$\mathrm{Im}\int_C d\tilde{f} = \mathrm{Im}\int_C df$$

が成り立つ (つまり, $\tilde{f}$ の flux は f の flux と等しい).

(3) $\tilde{f}|_A = f|_A$ であり, $\tilde{f}$ と f は各点 $p \in A \cap \mathring{S}$ で s 次の接触をする.

さらに, もし $f|_{\mathring{S}}$ が $p \in \mathring{S}$ において, カスプ辺 (resp. ツバメの尾, カスプ状交叉帽子) をもつならば, $\tilde{f}$ も p においてカスプ辺 (resp. ツバメの尾, カスプ状交叉帽子) をもつように選ぶことができる.

Mergelyan の定理 (事実 1.3) が $\mathcal{A}^0(S, \boldsymbol{C})$ に属する関数に対する近似定理であったことから, 定理 3.4 は Mergelyan 型の近似定理であると言える. また, 極小曲面は特異点をもたないため, Alarcón, Forstnerič, López による近似定理には特異点に関する記述は含まれない. この意味で, 定理 3.4 は極大面に特有の結果を含んだものである.

参考文献

[1] A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López, *Minimal Surfaces from a Complex Analytic Viewpoint*, Springer Monogr. Math. Cham: Springer, 2021.

[2] F. Forstnerič, *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings*, second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 56, Springer, Cham, 2017.

[3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008), 827-848.

[4] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*, translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman, Series in Algebraic and Differential Geometry, 1, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2022; MR4357539

[5] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. Vol. 35, 2006.